Matematica III

Docenti: Francesca De Marchis e Giulio Galise
CdL in Statistica, Economia, Finanza e Assicurazioni,
CdL in Statistica, Economia e Società, CdL in Statistica Gestionale
A.A. 2022/2023

Esercitazione 9

Esercizio 1. Calcolare

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz$$

nei seguenti casi:

(a) $f(x,y,z) = x\arctan(y) + \dfrac{e^{\frac{1}{\sin(z)}}\cos(z)}{\sin^3(z)}$, $\quad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 \le x \le \frac{1}{3},\, 0 \le y \le 1,\, \frac{\pi}{4} \le z \le \frac{\pi}{2}\right\}$

(b) $f(x,y,z) = e^{x+y+z}$, $\quad D$ è il tetraedro delimitato dai piani coordinati $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e dal piano $x + y + z = 1$

(c) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\quad D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 \le 1\right\}$

(d) $f(x,y,z) = (x^2 + y^2)^\alpha$, $\quad D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 \le 1\,,\, 0 \le z \le 3 - x - \frac{y}{2}\right\}$ ed α è un parametro positivo.

Esercizio 2. Calcolare

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz$$

Esercizio 3. Stabilire la validità della seguente disuguaglianza

$$\iiint_D e^{(x+y)^2+z} - 1\,dxdydz \ge \sin\left(\iint_{x^2+y^2\le 1} \sin(x)\,dxdy\right)$$

essendo $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 \le 1,\ z \in [0,2]\right\}$.

Esercizio 4. Calcolare la misura dell'insieme ottenuto dall'intersezione del cono $x^2 + y^2 \le z^2$ e della palla $x^2 + y^2 + z^2 \le 3z$. *(Suggerimento: può essere utile usare le coordinate sferiche)*

Esercizio 5. Calcolare il volume dell'insieme

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 + 1 \le x^2 + y^2 \le z + 7\}.$$

Esercizio 6. Calcolare
$$\iiint_E (x^2+y^2)\,dxdydz,$$
dove
$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+4z^2 \le 4, y \le -|x|\}.$$

Esercizio 7. Sia
$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x^2+y^2 \le z \le 3+2y\}.$$

i. Calcolare il volume di T;
ii. Calcolare $\iiint_T x^2\,dxdydz$.

Esercizio 8. Calcolare, al variare di $\alpha > 0$, gli integrali generalizzati
$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\le 1} \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^\alpha}\,dxdydz\ ,\quad \iiint_{x^2+y^2+z^2\ge 1} \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^\alpha}\,dxdydz\ .$$

(Suggerimento: usare rispettivamente $D_n = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{n^2} \le x^2+y^2+z^2 \le 1\right\}$ *ed* $E_n = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le x^2+y^2+z^2 \le n^2\right\}$ *come successioni invadenti)*